Primjena određenog integrala u geometriji

Matematika 2

Erna Begović Kovač, 2019.

Literatura: I. Gusić, Lekcije iz Matematike 2
http://matematika.fkit.hr

Uvod

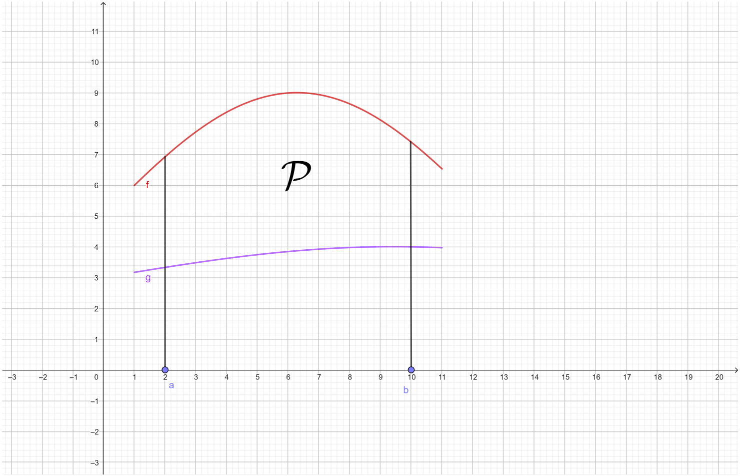
Korištenjem integralnog računa računat ćemo

- površine ravninskih likova i
- volumen tijela nastalog rotacijom.

Površina

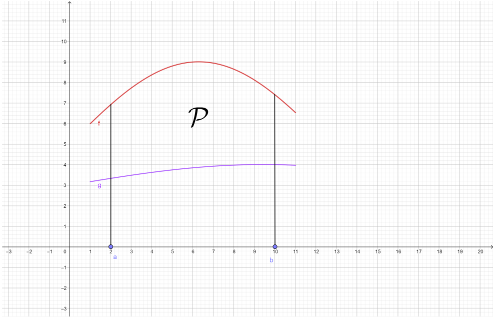
Računanje površine podskupa ravnine zadanog uvjetima

$$a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq f(x)$$



f i g pozitivne funkcije

Ako su f i g pozitivne funkcije, imamo



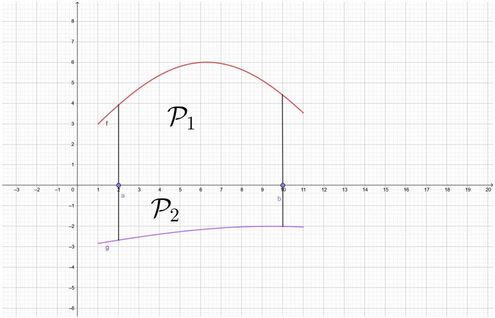
$$\mathcal{P}_1 = \int_a^b f(x)dx, \qquad \mathcal{P}_2 = \int_a^b g(x)dx,$$

pa je

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

f pozitivna, g negativna

Ako je f pozitivna, a g negativna funkcija, imamo



$$\mathcal{P}_1 = \int_a^b f(x)dx, \qquad \mathcal{P}_2 = -\int_a^b g(x)dx,$$

pa je

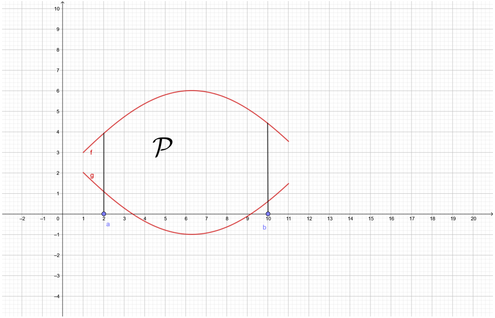
$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Formula za površinu

Formulu

$$\mathcal{P} = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

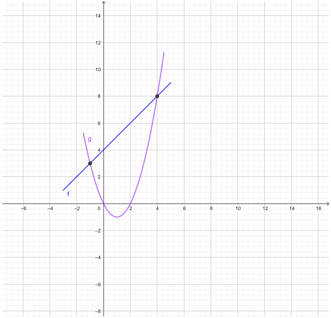
možemo korisiti i u općem slučaju.



Primjer 1

Izračunajte površinu podskupa ravnine omeđenog krivuljama

$$y = x + 4 \quad \text{i} \quad y = x^2 - 2x.$$



Dobijemo

$$\mathcal{P} = \int_{-1}^{4} (x + 4 - (x^2 - 2x))dx = \ldots = \frac{125}{6}.$$

Primjer 2

Izračunajte površinu podskupa ravnine omeđenog krivuljama

$$y^2 = x + 1 \quad \text{i} \quad y = x - 1.$$

Postavimo i riješimo odgovarajući integral

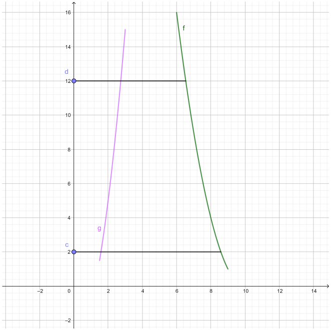
$$\mathcal{P} = \int_{-1}^{0} (\sqrt{x+1} - (-\sqrt{x+1}))dx + \int_{0}^{3} (\sqrt{x+1} - (x-1))dx$$
$$= \ldots = \frac{9}{2}.$$

Ovaj primjer možemo riješiti i na drugi način.

Druga formula za površinu

Računanje površine podskupa ravnine zadanog uvjetima

$$c \le y \le d, \quad g(y) \le x \le f(y)$$



$$\mathcal{P} = \int_c^d (f(y) - g(y))dy$$

Primjer 2

Izračunajte površinu podskupa ravnine omeđenog krivuljama

$$y^2 = x + 1 \quad \text{i} \quad y = x - 1.$$

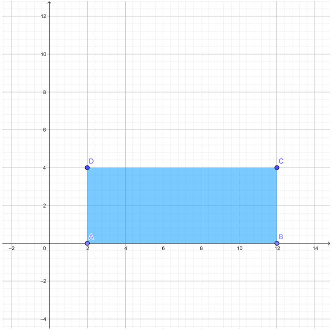
Integriranjem po y dobijemo

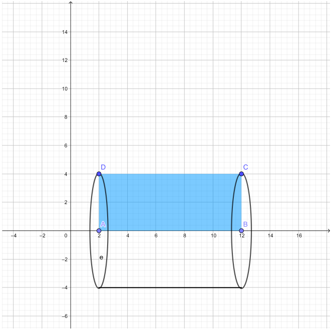
$$\mathcal{P} = \int_{-1}^{2} (y - 1 - (y^2 - 1))dy = \ldots = \frac{9}{2}.$$

Volumen rotacijskog tijela

Rotacijom ravninskog lika oko neke osi rotacije dobije se rotacijsko tijelo.

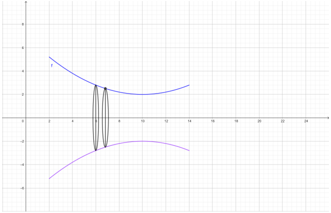
Npr. rotacijom pravokutnika oko x-osi dobijemo valjak.





Formula za volumen rotacijskog tijela

Dio rotacijskog tijela od x do $x + \triangle x$ je pseudovaljak, tj. približno to je valjak polumjera $f(x)$ i visine $\triangle x$.



Vrijedi

$$\triangle V \approx f^2(x)\pi\triangle x.$$

Stoga je

$$dV = f^2(x)\pi dx \quad \Rightarrow \quad V' = f^2(x)\pi.$$

Onda za V dobijemo

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Primjer 4 (kugla)

Prikažite kuglu kao rotacijsko tijelo i izračunajte njen volumen korištenjem formule za volumen rotacijskog tijela.

Primjer 5 (stožac)

Prikažite stožac kao rotacijsko tijelo i izračunajte mu volumen korištenjem formule za volumen rotacijskog tijela.

Četiri formule za volumen rotacijskog tijela

- $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$
- $V_x = 2\pi \int_c^d g(y)ydy$
- $V_y = \pi \int_c^d g^2(y)dy$
- $V_y = 2\pi \int_a^b f(x)xdx$

Zadatci

1. Izračunajte površinu područja omeđenog grafom funkcije $f(x) = x^3$ i pravcima $x = 2$ i $y = 27$.

2. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom oko x-osi dijela ravnine omeđenog krivuljom $y = \sqrt{x-2}$ i pravcima $x = 2$ i $x = 5$.

3. Izračunajte volumen valjka nastalog rotacijom oko y-osi pravokutnika s vrhovima $(0,0)$, $(0,5)$, $(2,5)$ i $(2,0)$.